BAC 1990 SESSION PRINCIPALE

EXERCICE 1

Pour tout complexe z on pose $f(z)=z^3+2\left(-\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1-i\sqrt{3}\right)z+8i$

1/a- Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b- Résoudre alors $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, z_1 étant celle qui a une partie imaginaire négative.

2/a- Donner la forme trigonométrique de $\omega = \frac{z_1}{z_0}$.

b- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, ωz et $\omega^2 z$.
Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC non isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. A tout point M de la droite (AB) on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan de bord (BC) et BM=CN.

1/ Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que :
pour tout point M de (AB) on a : $R(M) = N$ et $R(B) = C$.
Préciser une mesure de son angle et construire son centre Ω.

2/ Soit O le milieu du segment [BC]. On désigne par $S_{(O\Omega)}$ la symétrie orthogonal d'axe $(O\Omega)$ et on pose $f = S_{(O\Omega)} \circ R$.

a- Déterminer $f(B)$ et $f(\Omega)$.

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

3/ Soit I le milieu du segment [MN].

a- Quel est l'ensemble D des points I lorsque M décrit la droite (AB)?

b- Construire D.

PROBLEME

Soit la fonction $f :]-1;1[\to IR; x \mapsto \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}dt$